7. Потребуем, чтобы теперь любое двойное направление плоскости $\Delta_2(A)=(AA_1A_2)$ распределения Δ_2 было характеристическим (ω^3 - не характеристическая линия). Это приводит к следующим соотношениям:

$$h^1_{11}=h^2_{22}=h^2_{11}=h^3_{11}=h^1_{22}=h^3_{22}=0.$$

Уравнения характеристических принимают вид: $h^i_{33}(\omega^3)^2=\lambda\omega^3$, от-
куда следует, что, кроме характеристических направлений на
плоскости $\Delta_2(A)$, существует еще одно характеристическое направ-
ление (AS) , где $\vec{S}=h^i_{33}\vec{A}_i$. Обозначим через S_{12} точку пере-
сечения прямых (A_3S) и (A_1A_2) , а через C_{12} - точку пересече-
ния прямых (A_3C) и (A_1A_2) . Направление (AS) будет принадле-
жать плоскости (ABA_3) тогда и только тогда, когда сложное от-
ношение $(A_1A_2, C_{12}S_{12})$ равно единице:

$$(A_1A_2, C_{12}S_{12})=\frac{(\gamma^3_3-\gamma^1_1)\gamma^2a^1_{33}-\gamma^3_3\gamma^1\gamma^2a^0_{33}}{(\gamma^3_3-\gamma^1_1)\gamma^1a^2_{33}-\gamma^3_3\gamma^1\gamma^2a^0_{33}}=1.$$

Последнее возможно, если $\mu=\gamma^2a^1_{33}-\gamma^1a^2_{33}=0$. Можно показать,
что μ - относительный инвариант. Геометрический смысл обра-
щения его в нуль следующий: если любое двойное направление
плоскости $\Delta_2(A)$ -характеристическое, то относительный инвари-
ант μ равен нулю тогда и только тогда, когда характеристи-
ческое направление (AS) принадлежит плоскости, содержащей
прямые (AB) и $\Delta_1(A)$. Если потребовать, чтобы все двойные
направления распределений Δ_1 и Δ_2 были бы характеристичес-
кими, то получим, что указанные направления должны быть не
просто характеристическими, но и каждое из них должно быть
f -главным.

Библиографический список

1. Б а з ы л е в В.Т. Многомерные сети двойных линий // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб. науч. тр./ Калинингр. ун-т. Калининград, 1975. Вып.6. С.19-25.

УДК 514.75

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНГРУЭНЦИЙ ОРИЦИКЛОВ С ТРЕХКРАТНОЙ ФОКАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

В.С.М а л а х о в с к и й

(Калининградский государственный университет)

В трехмерном пространстве Лобачевского Λ_3 в интерпретации Кэли-Клейна исследуется подкласс $\mathcal{L}'_0$ конгруэнций орициклов с трехкратной фокальной поверхностью. Доказана теорема существования и получены геометрические свойства ассоциированных с $\mathcal{L}'_0$ прямолинейных конгруэнций и поверхностей трехмерного проективного пространства, содержащего абсолют Q_0 .

Трехмерное пространство Лобачевского Λ_3 в интерпретации Кэли-Клейна образовано внутренними точками невырожденной действительной нелинейчатой квадрики Q_0 , называемой абсолютом, причем точки абсолюта являются несобственными точками пространства Λ_3 . Орицикл C пространства Λ_3 интерпретируется нераспадающейся действительной кривой второго порядка, расположенной внутри абсолюта, касающейся абсолюта в одной из его точек A_0 так, что полюс A_M касательной к орициклу C в любой точке $M\in C$ относительно сечения Γ абсолюта Q_0 плоскостью орицикла C лежит на прямой A_MM .

Рассмотрим двупараметрическое семейство (конгруэнцию) $\mathcal{L}$ орициклов. Отнесем конгруэнцию $\mathcal{L}$ к реперу $\{A_\alpha\}$ $(\alpha,\beta=0,1,2,3)$, где A_3 - произвольная точка сечения Γ , A_1 и A_2 полярно сопряжены между собой и с точками A_0 и A_3 относительно абсолюта Q_0 , причем точка A_1 лежит в плоскости C . При надлежащей нормировке вершин репера уравнения абсолюта Q_0 и орицикла C примут соответственно вид [1 , с.48]:

$$(x^1)^2+(x^2)^2-2x^0x^3=0, \qquad (1)$$

$$(x^1)^2-2x^0x^3+2(x^3)^2=0, \quad x^2=0. \qquad (2)$$

ействительно, поверхность (I) является невырожденной нели-
ейчатой квадрикой с вещественными точками. Коника (2) также

действительная невырожденная и касается квадрики (I) в точке A_0, так как касательная $x^2=0$, $x^3=0$ к конике лежит в касательной плоскости к квадрике. Докажем, что каждая точка $M(m^0,m^1,0,m^3)$ коники (2) является внутренней точкой абсолюта (I).

Так как $M\in C$, то

$$(m^1)^2 - 2m^0m^3 + 2(m^3)^2 = 0. \tag{3}$$

Поляра точки M относительно абсолюта (1) пересекает абсолют по мнимой нераспадающейся кривой второго порядка:

$$\begin{cases} (m^3x^1 - m^1x^3)^2 + (m^3)^2\left((x^2)^2 + 2(x^3)^2\right) = 0, \\ m^3x^0 - m^1x^1 + m^0x^3 = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Касательная к конике C в точке M определяется уравнениями:

$$m^1x^1 + (2m^3 - m^0)x^3 - m^3x^0 = 0, \quad x^2 = 0. \tag{5}$$

Ее полюс

$$A_M = (m^0 - 2m^3)A_0 + m^1A_1 + m^3A_3 = M - 2m^3A_0 \tag{6}$$

относительно сечения Γ лежит на прямой A_0M.

Система уравнений Пфаффа конгруэнции $\mathcal{L}$ состоит [I, с.49] из вполне интегрируемой подсистемы

$$\begin{cases} \omega^3_i = \omega^i, \quad \omega^i_3 = \omega^0_i, \; \omega^3_0 = 0, \; \omega^0_3 = 0, \; \omega^2_1 + \omega^1_2 = 0, \\ \omega^2_2 = \omega^1_1, \quad \omega^0_0 + \omega^3_3 = 2\omega^2_2, \end{cases} \tag{7}$$

обеспечивающей инвариантность абсолюта Q_0, и уравнений:

$$\omega^2_1 = a_k\omega^k, \quad \omega^0_2 = b_{2k}\omega^k, \quad \omega^0_0 - \omega^3_3 = c_k\omega^k, \tag{8}$$

где $\omega^k \overset{def}{=} \omega^k_0 \quad (i,j,k = 1,2)$.

Дифференцируя (2) с учетом (7), (8) и соотношений

$$dx^\alpha = x^\beta\omega^\alpha_\beta + \theta x^\alpha, \quad D\theta = 0, \tag{9}$$

получим:

$$c_k\omega^k(x^3)^2 - 2x^1x^3\omega^1 = 0, \quad x^0\omega^2 + a_k\omega^kx^1 + b_{2k}\omega^kx^3 = 0. \tag{10}$$

Исключая из (10) ω^1, ω^2 и учитывая (2), приходим к системе алгебраических уравнений

$$\begin{cases} (x^1)^2 - 2x^0x^3 + 2(x^3)^2 = 0, \quad x^2 = 0, \\ x^3\left((c_1x^3 - 2x^1)(x^0 + a_2x^1 + b_{22}x^3) - c_2x^3(a_1x^1 + b_{21}x^3)\right) = 0, \end{cases} \tag{11}$$

определяющей тройную несобственную фокальную точку A_0 орицикла $C\in\mathcal{L}$ и три собственные фокальные точки. Выберем точку A_3 так, чтобы прямая A_0A_3 содержала одну из собственных фокальных точек орицикла. Тогда, в силу сделанной ранее нормировки вершин репера, эта фокальная точка станет единичной точкой ребра A_0A_3, т.е. точкой

$$E = A_0 + A_3, \tag{12}$$

причем

$$\omega^0_1 = b_{1k}\omega^k, \quad c_1(1 + b_{22}) - c_2b_{21} = 0. \tag{13}$$

О п р е д е л е н и е 1. Конгруэнцией $\mathcal{L}_0$ называется конгруэнция $\mathcal{L}$, имеющая такую фокальную поверхность S, касательная плоскость к которой содержит в каждой точке E прямую A_1A_2.

Т е о р е м а 1. Конгруэнции $\mathcal{L}_0$ существуют и определяются с произволом двух функций двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем:

$$dE = \omega^3_3E + (c_1\omega^1 + c_2\omega^2)A_0 + (\omega^k + \omega^k_3)A_k. \tag{14}$$

Следовательно, конгруэнция $\mathcal{L}_0$ характеризуется соотношениями

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \tag{15}$$

уравнениями Пфаффа (7) и следующими:

$$\omega^2_1 = a_k\omega^k, \quad \omega^0_i = b_{ik}\omega^k, \tag{16}$$

где $b_{12}=b_{21}$. Система (7), (16) – в инволюции и определяет конгруэнции $\mathcal{L}_0$ с произволом двух функций одного аргумента.

Фокальные точки орицикла $C\in\mathcal{L}_0$, отличные от A_0 и E, определяются уравнениями:

$$\begin{cases}(x^1)^2+2\cdot(1+b_{22})(x^3)^2+2a_2x^1x^3=0,\\ x_0+a_2x^1+b_{22}x^3=0.\end{cases}\qquad(17)$$

Если

$$a_2^2-2b_{22}-2=0,\qquad(18)$$

то эти точки совпадают и определяют сдвоенную фокальную точку

$$H=(1+\tfrac{1}{2}a_2^2)A_0-a_2A_1+A_3.\qquad(19)$$

О п р е д е л е н и е 2. Конгруэнцией $\mathcal{L}'_0$ называется конгруэнция $\mathcal{L}_0$ со строенной собственной фокальной поверхностью.

Т е о р е м а 2. Конгруэнции $\mathcal{L}'_0$ существуют и определяются с произволом трех функций одного аргумента.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сравнивая (19) и (12), убеждаемся, что точки E и H совпадают, т.е. E является строенной фокальной точкой, тогда и только тогда, когда $a_2=0$. Система уравнений Пфаффа конгруэнции $\mathcal{L}'_0$ имеет вид:

$$\begin{cases}\omega^3_i=\omega^i,\quad \omega^i_3=\omega^0_i,\quad \omega^2_1+\omega^1_2=0,\ \omega^0_0=0,\omega^1_1=0,\omega^2_2=0,\\ \omega^2_1=a_1\omega^1,\ \omega^0_1=b_{11}\omega^1+b_{12}\omega^2,\ \omega^0_2=b_{12}\omega^1-\omega^2.\end{cases}\qquad(20)$$

Эта система – в инволюции и имеет решение с произволом трех функций одного аргумента.

Матрица деривационных формул репера $\{A_\alpha\}$ конгруэнции $\mathcal{L}'_0$ имеет вид:

$$\begin{bmatrix} 0 & \omega^1 & \omega^2 & 0\\ b_{11}\omega^1+b_{12}\omega^2 & 0 & a_1\omega^1 & \omega^1\\ b_{12}\omega^1-\omega^2 & -a_1\omega^1 & 0 & \omega^2\\ 0 & b_{11}\omega^1+b_{12}\omega^2 & b_{12}\omega^1-\omega^2 & 0\end{bmatrix}\qquad(21)$$

Обозначим через Γ_i линии на абсолюте Q_0, огибаемые прямыми A_0A_i, а сеть линий Γ_1, Γ_2 назовем сетью Σ. Из (21) непосредственно вытекает

Т е о р е м а 3. Конгруэнции $\mathcal{L}'_0$ обладают следующими свойствами: 1) сеть Σ сопряжена на абсолюте Q_0; 2) торсы ассоциированных прямолинейных конгруэнций (A_0A_1) и (A_0A_2) высекают на их общей фокальной поверхности Q_0 сеть Σ; 3) ассоциированная поверхность (A_1) является фокальной поверхностью прямолинейной конгруэнции (A_0A_1); 4) торсы ассоциированных прямолинейных конгруэнций (A_0A_3) и (A_1A_2) соответствуют; 5) если поверхность (A_1) вырождается в линию, то торсы ассоциированных прямолинейных конгруэнций (A_0A_3) и (A_1A_3) соответствуют сети Σ, и наоборот.

Конгруэнции, обладающие последним свойством, назовем конгруэнциями $\mathcal{L}'_{0,1}$. Они характеризуются условием $b_{12}=0$ и определяются с произволом двух функций одного аргумента. Фокальное семейство конгруэнций $\mathcal{L}'_{0,1}$ соответствует линиям Γ_1, а фокальная поверхность S вырождается в линию с касательными EA_1.

Среди подклассов конгруэнций $\mathcal{L}_0$ отметим также конгруэнции $\mathcal{L}'_{0,2}$, определяемые условием $a_1=0$ и характеризуемые тем, что ассоциированная поверхность (A_2) является фокальной поверхностью прямолинейной конгруэнции (A_0A_2). Система уравнений Пфаффа конгруэнции $\mathcal{L}'_{0,2}$ вполне интегрируема.

Библиографический список

1. М а л а х о в с к и й В.С. О конгруэнциях орициклов и орисфер в пространстве Лобачевского // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1990. Вып. 21. С. 47-50.

2. М а л а х о в с к и й В.С. Теория конгруэнций кривых и поверхностей второго порядка в трехмерном проективном пространстве: Учеб. пособие / Калинингр. ун-т. Калининград, 1986. 72с.